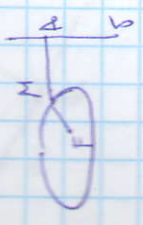


Полная коническая сечение (кроме орта) представляет собой изображение места точек, отношение расстояний которых от некоторой точки F и нек. прямой δ постоянно.

Точка F наз. фокусом, а прямая δ - директрисой.



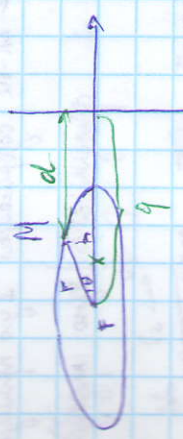
M - произвольная точка конического сечения

$$\frac{FM}{AM} = e$$

$e < 1$ эллипс
 $e = 1$ парабола
 $e > 1$ гипербола

Число e наз. эксцентриситетом.

Упр-е конического сечения δ называт. с.к.



Расстояние между фокусом и параболой равно, а наибольший угол между перпендикуляром директрисы и осью симметрии равен $r = ed$

Пусть q - радиус фокуса F директрисы

или $x < q$, то $d = q - x$

Так будет при эллипсе, параболе и гиперболы, когда фокус находится к директрисе.

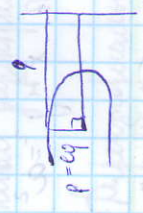
В наивысшей с.к. $x = r \cos \theta$

Таким образом $r = ed = e(q - x) = eq - e r \cos \theta$

$r = \frac{eq}{1 + e \cos \theta}$

Упр-е эллипса, парабола и гиперболы

Величина eq имеет название полулунного

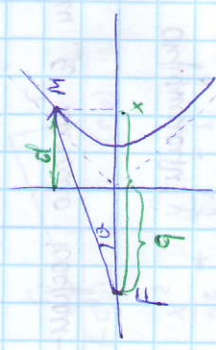


или $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = eq$ - расстояние от фокуса до директрисы

или наз. фокальным расстоянием и обознач. p .

$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$

Для эллипса $d = x - q$



Таким образом $r = ed = e(x - q) = ex - eq$

$\Rightarrow r = \frac{eq}{e \cos \theta - 1}$

Упр-е гиперболы

или $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ или $r = \frac{p}{e \cos \theta - 1}$

Замечание: "Важно знать, что угол θ измеряется на π , $\cos \theta$ имеет знак

$\Rightarrow r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$ и $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$

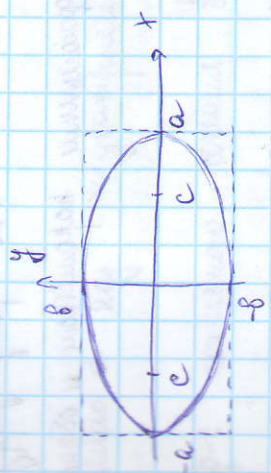
Упр-е конических сечений δ называт. с.к.

Эллипс — замкнутая кривая, если спл. П.С.К. x, y , в которой $ур$ е этой кривой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } a \geq b > 0$$

наименьшее $ур$ е — мнимая

частный случай: при $b=a$ это окружность $x^2 + y^2 = a^2$



Эллипс — замкнутая дуга прямой — $|x| \leq a, |y| \leq b$
Вершины — точки $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$

Фокус — $(\pm c, 0)$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Все коэффициенты эл. — действительные, а канонические координаты — центральные действительные

Эллипс можно назвать эллипсом окружности

Уравнение эллипса

a — большая полуось
 b — малая полуось

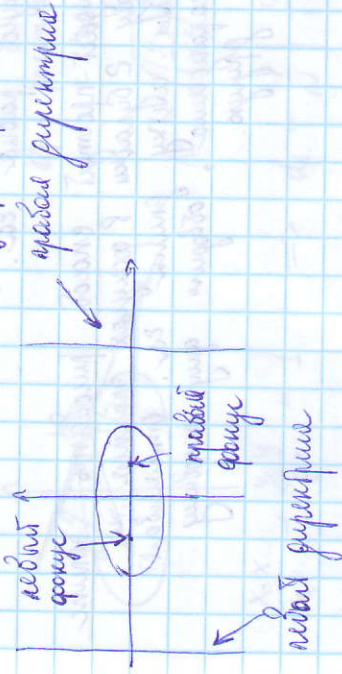
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ — минимальный эксцентриситет}$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad 0 < e < 1$$

$2c$ — расстояние между фокусами

$$P = \frac{b^2}{a} \text{ — параметр параболы}$$

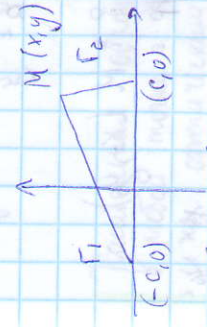
При $e \neq 0$ $x = \pm \frac{a}{e}$ — директрисы



Директрисы эл-са — мнимые

Эллипс эл. — ГМТ, отстоящие равно от фокуса и от директрисы равно a/e .

Фокальные эл-са — мнимые



r_1 и r_2 — действительные и мнимые полуоси

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2$$

$$r_2^2 = (x-c)^2 + y^2$$

эксцентриситет

$$r_1^2 = \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2 =$$

$$= e^2 x^2 + 2cex + a^2 = (ex+a)^2, \quad e < 1$$

$$|x| \leq a \Rightarrow |ex| \leq a \Rightarrow r_1 = ex + a$$

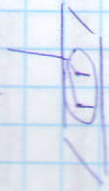
Аналогично можно показать, что $r_2 = a - ex$

$$\text{Среднее арифметическое } r_1 + r_2 = 2a$$

Вспомогательный эллипс $M(x, y)$ — малая полуось, что $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$, но не наоборот

Стереометрия, конусы от конуса, радиусы, радиусы, радиусы.

Рассмотрим конус с вершиной в начале координат и осью симметрии, совпадающей с осью Oz . Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ — точка на поверхности конуса. Тогда $OM = R$ (радиус конуса). Имеем:



Рассмотрим конус к конусу

Вершина конуса — начало координат. Радиус конуса — с конусом.

$$y' = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{x}{y}$$

Значит, касательная к конусу в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ (отличной от вершины) имеет уравнение:

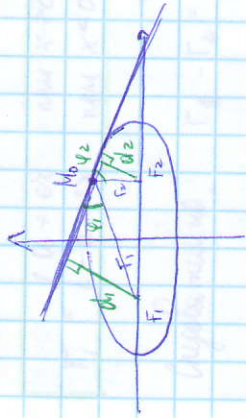
$$y - y_0 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{x}{y} (x_0 - x_0) / y_0 : \partial^2 \text{ и угадываем, что } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

Получаем уравнение:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad \text{уравнение касательной к конусу в точке } M(x_0, y_0, z_0)$$

В вершинах $(\pm a, 0)$ касательными к конусу являются прямые $x = \pm a$, и они также являются касательными.

Имеем: если конус



d_1 — расстояние от F_1 до касательной к конусу в точке (x_0, y_0)

$$N = \sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \Rightarrow d_1 = \frac{1}{N} \left| \frac{x_0(-c)}{a^2} + \frac{y_0 \cdot 0}{b^2} - 1 \right| =$$

$$= \frac{1}{N} \left| \frac{x_0 c}{a^2} + 1 \right| = \frac{1}{N a} |x_0 e + a| = \frac{r_1}{N a}$$

$$\text{Аналогично, } d_2 = \frac{1}{N} \left| \frac{x_0 c}{a^2} - 1 \right| = \frac{1}{N} |x_0 e - a| = \frac{r_2}{N a}$$

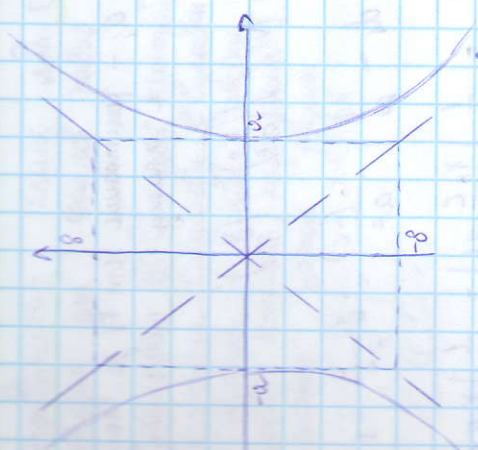
$$\text{Следовательно, } \sin \varphi_1 = \frac{d_1}{r_1} = \frac{1}{N a} \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

Касательная отражает световые лучи, падающие в любой точке конуса под углом $\leq 90^\circ$. Это и есть свойство конуса.

Пусть световые лучи падают на конус под углом φ к его оси. Тогда все отраженные лучи будут параллельны друг другу.

§3. Гиперболы

Пусть на гиперболе m -ти конуса. Имеем, если конус имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a > 0, b > 0$.



Асимптоты: $y = \pm \frac{b}{a} x$

Касательные к осям симметрии, точка $O(0,0)$ - центр.

Числа a - действительная полуось
 b - мнимая полуось

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ мнимый эксцентриситет

$2c$ - фокусное расстояние

$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ - эксцентриситет

$P = \frac{b^2}{a^2}$ фокальный параметр
 $(\pm a, 0)$ вершины

$(\pm c, 0)$ фокусы

$x = \pm \frac{a}{e}$ директрисы

формулы $r_1^2 = (ex+a)^2$
 $r_2^2 = (ex-a)^2$

точка асимптотически

$|ex| > |x| \geq a$

$r_1 = \begin{cases} a+ex, & \text{при } x > 0 \\ -a-ex, & \text{при } x < 0 \end{cases}$

$r_2 = \begin{cases} -a+ex, & \text{при } x > 0 \\ +a-ex, & \text{при } x < 0 \end{cases}$

Среднее арифметическое, $r_1 - r_2 = \begin{cases} 2a, & \text{при } x > 0 \\ -2a, & \text{при } x < 0 \end{cases}$, т.е. $|r_1 - r_2| = 2a$

Обратно, если абсолютная величина разности координат точки $M(x,y)$ по формуле равно $2a$, т.е. если $|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a$, то точка принадлежит гиперболе.

Решение в-во гиперболы

Гипербола зад. ГМТ, абсолютная величина разности расстояний которых от фокусов равна $2a$.

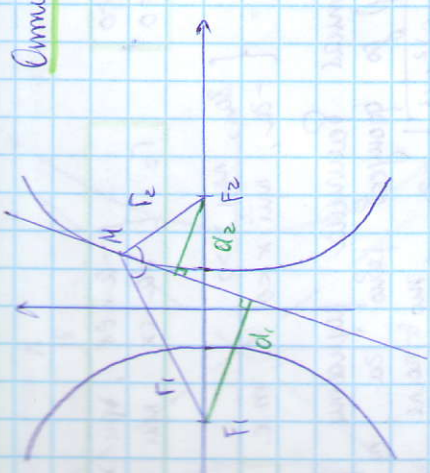


Таким образом гипербола:

Все точки в фокусах гиперболы и гипербола к ним идут. На них гипербола касается и, касаясь точек, находящихся в вершине гиперболы. Если перпендикуляр провести к касательной, то касательная будет перпендикулярна радиусу-вектору, так что радиус перпендикуляр будет нормалью.

гипербола касательная к гиперболе
 в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$
 точка асимптотически

Отношение эв-во инерции



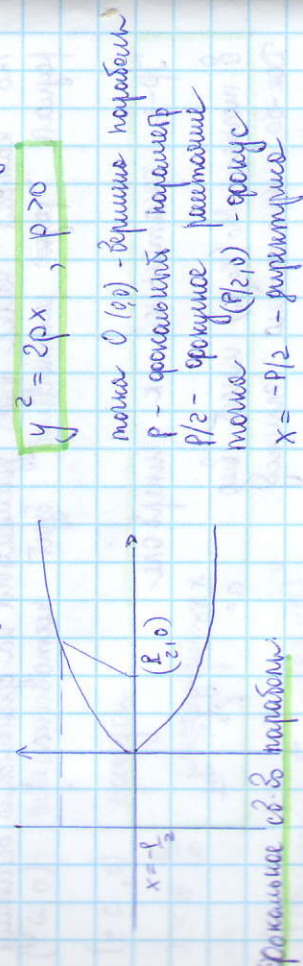
$d_1 = \frac{r_1}{N_1}$, $d_2 = \frac{r_2}{N_2}$ — для эв-во аналогично тангенсу.

Касательная в любой точке эллипса делит угол с фокусом — или параболы по отношению к фокусу (эв-во) от инерции — это отношение эв-во инерции.

Пусть сумма: эллипс или парабола, если эв-во инерции, или отклонения (эв-во) от инерции — касательная инерции у эллипса фокуса.

54. Парабола

Линия на эллипсе или парабола, если эв-во инерции, с.к. x, y , в которой эв-во инерции имеет вид



Парабола эв-во инерции.

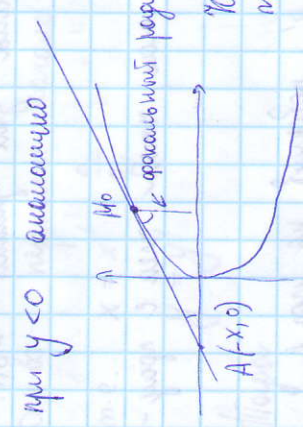
Парабола эв-во инерции, разбавленная от фокуса и директрисы.

Уг-е касательной к параболы

$y > 0 \Rightarrow y' = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}$

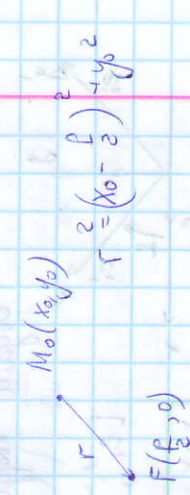
Строим $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$, м.к. $y_0^2 = 2px_0$, то

$y y_0 = p(x + x_0)$ уг-е касательной к параболы.



$|AF| = x_0 + \frac{p}{2}$

$|M_0F| = x_0 + \frac{p}{2}$



Потому $LA M_0 F = \angle M_0 A F$ по аналогии эв-во параболы

пусть сумма: если у фокуса F инерция нули, то м.к. уг-е касательной равен уг-у инерции, все отклонения нули будут параллельны оси параболы.

На этом эв-во аналогично параболы эллипса, проинтерпретировать, значения их инерции.

5.5 "Канонические кривые второго порядка"

Опр. Кривой второго порядка на ГМТ m -ти, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \quad (1)$$

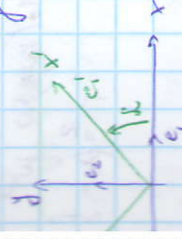
(где: с помощью преобразования СК привести уравнение к нормальному виду. Перенести СК в C_1 , которая единственная год равна СКВ.

Лемма 1

Всегда можно повернуть СК так, чтобы член с xy -слагаемым был равен 0.

Доказано: Докажем, $a_{12} \neq 0$

Введем координаты x', y' , повернув на угол α



$$[e'_1, e'_2] = [e_1, e_2] \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

где x, y — координаты старой СК

Получим эти выражения в (1) и найдем $2a_{12}x'y'$

$$2a_{12}(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 2a_{12}(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + 2a_{12}(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 =$$

$$2a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + 2a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + 2a_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$$

$$= (a_{22} - a_{11}) \sin 2\alpha + 2a_{12} \cos 2\alpha$$

$$\text{П.к. } a_{12} \neq 0, \text{ то } \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}},$$

найдем $a'_{12} = 0$

Таким образом, можем считать, что уравнение имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \quad (2)$$

Лемма 2

Если в уравнении (2) $a_{11} \neq 0$ ($a_{22} \neq 0$), то член с $x(y)$ можно изменить переносом начала координат.

Доказано: перенесем начало координат в точку $(-\frac{a_1}{a_{11}}, -\frac{a_2}{a_{22}})$

$$\text{т.е. } x = x' - \frac{a_1}{a_{11}}$$

$$y = y'$$

Получим

$$a_{11}x^2 + 2a_1x = a_{11} \left(x'^2 + 2 \frac{a_1}{a_{11}} x' + \left(\frac{a_1}{a_{11}} \right)^2 \right) - \frac{a_1^2}{a_{11}}$$

$$\text{П.е. } a_{11}x'^2 + 2a_1x' = a_{11}x'^2 - \frac{a_1^2}{a_{11}}$$

Отметим, что мы перенесли начало координат только при x^2 и y^2 уже не изменился.

Итак, считая, что $a_{22} \neq 0$, можно выделить координаты x' и y' канонические уравнения:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2a_1x' + 2a_2y' + a_0 = 0$$

Разделив на a_{11} получим каноническое уравнение эллипса, гиперболы, параболы, мнимой КВН:

1. эллипс
2. гиперболы
3. парабола
4. парабола
5. парабола
6. эллипс
7. эллипс
8. гиперболы